Логарифмічні нерівності.

Перетини та об’єднання вивчають нерівності та системи нерівностей.

Тож навчися з легкістю знаходити перетини та об’єднання розв’язків.

<u>Корисна порада.</u>

1. Запам’ятай! Розв’язком логарифмічної нерівності є система нерівностей, до якої входять: ОДЗ (вирази, що містяться під знаком логарифма більше нуля і сама логарифмічна нерівність).
2. Знак логарифма можна опускати лише у простій логарифмічній нерівності. Простою є нерівність у лівій і правій частинах, якої лише по одному логарифму. Наприклад:

   $\log_{0,8}(x+6) < \log_{0,8} 9.$
3. Якщо будете опускати логарифми, обов’язково враховуйте основи. Якщо основа: $\boxed{a > 1}$, то знак нерівності не зміниться.

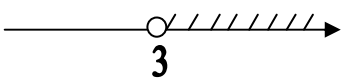
   Якщо основа правильний дріб $\boxed{0 < a < 1}$, то знак нерівності поміняється.

   Наприклад:

   а) $\log_2 x > \log_2 3$

   $a = 2,\ \boxed{a > 1}$

   $x > 3$

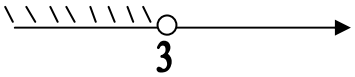
   

   $x \in (3;+\infty)$

   б) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 3$

   $a = \frac{1}{2},\ \boxed{0 < a < 1}$

   $x < 3$

   $x \in (-\infty;3)$

Обов’язково пам’ятайте це правило. Незнання правила доводить до неправильних розв’язків.

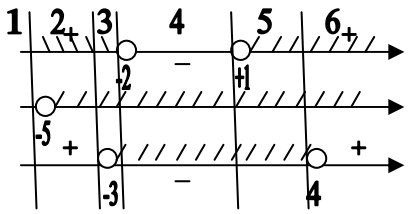
4. Зверни увагу на дужки:

{– перетин, тобто спільні розв’язки;

[– об’єднання розв’язків.

Зразки розв’язування логарифмічних нерівностей.

№1. Розв’язати логарифмічну нерівність:



$$\log_2(x^2+x-2) \le \log_2(2x+10)$$

$$\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ 2x+10>0 \\ \log_2(x^2+x-2) \le \log_2(2x+10) \end{cases}$$

$x^2+x-2>0$ $\qquad$ $2x+10>0$

$x^2+x-2=0$ $\qquad$ $2x>-10$

$x_1=-2$ $\qquad$ $x>-5$

$x_2=1$

$\log_2(x^2+x-2) \le \log_2(2x+10)$

$a=2;$ $\boxed{a>1}$

$x^2+x-2 \le 2x+10;$

$x^2+x-2-2x-10 \le 0;$

$x^2-x-12 \le 0;$

$x^2-x-12=0;$

$x_1=4$

$x_2=-3$

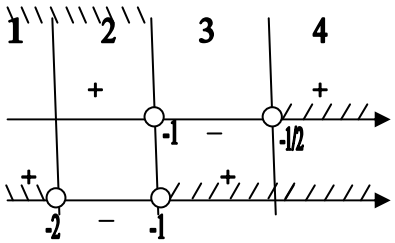
Відповідь: $x \in (-3;-2) \cup (1;4)$.

☺ ***<u>Розв’яжи самостійно:</u>***

$$\log_{0,1}(x^2-x-2) \ge \log_{0,1}(10-2x)$$

№2. Розв’яжіть нерівність:

$$\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \ge 1$$



$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x+1}>0 \\ \log_3 \frac{2x+1}{x+1} \ge 1 \end{cases}$$

$\frac{2x+1}{x+1} > 0$

$(2x+1)(x+1) > 0$

$2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1) > 0$

$2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1) = 0$

$x+\frac{1}{2} = 0 \qquad x+1 = 0$

$x = -\frac{1}{2} \qquad x = -1$

Щоб дізнатися, який проміжок слід фарбувати, треба дивитися не на умову, а у рядок перед рівнянням.

$\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq 1$ | $1 = \log_3 3$

$\log_3 \frac{2x+1}{x+1} \geq \log_3 3$ | $3^1 = 3$

$\boxed{a > 1}$

$\frac{2x+1}{x+1} \geq 3$

$\frac{2x+1}{x+1} - \frac{3}{1} \geq 0$

$\frac{2x+1-3(x+1)}{x+1} \geq 0$

$\frac{2x+1-3x-3}{x+1} \geq 0$

$\frac{-x-2}{x+1} \geq 0$

$(-x-2)(x+1) \geq 0$

$-(x+2)(x+1) \geq 0$

$(x+2)(x+1) \leq 0$

$(x+2)(x+1) = 0$

$x+2 = 0 \qquad x+1 = 0$

$x = -2 \qquad x = -1$

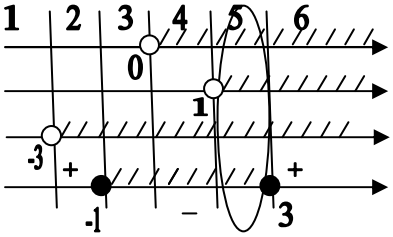
Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

☺ ***<u>Розв'яжи самостійно:</u>***

$\log_4 \frac{3x-1}{x-1} \geq 1.$

№3. Розв’язати нерівність:

$$\log_{0,4} x + \log_{0,4}(x-1) \geq \log_{0,4}(x+3)$$



$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ \log_{0,4} x + \log_{0,4}(x-1) \geq \log_{0,4}(x+3) \end{cases}$$

$x - 1 > 0 \qquad x + 3 > 0$

$x > 1 \qquad x > -3$

$\log_{0,4} x + \log_{0,4}(x-1) \geq \log_{0,4}(x+3)$

$\log_{0,4}(x \cdot (x-1)) \geq \log_{0,4}(x+3)$

$a = 0{,}4 \qquad \boxed{0 < a < 1}$ - знак нерівності міняємо

$x(x-1) \leq x + 3;$

$x^2 - x \leq x + 3;$

$x^2 - x - x - 3 \leq 0;$

$x^2 - 2x - 3 \leq 0;$ - знак, який показує що слід зафарбувати

$x^2 - 2x - 3 = 0;$

$(-1) \cdot 3$

$\boxed{a = 1}$

т. Вієта:

$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

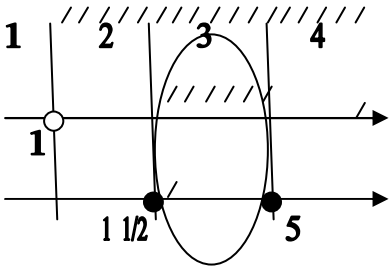
Відповідь: $x \in (1; 3]$.

☺ ***<u>Розв’яжи самостійно:</u>***

$$\log_{0,3} x + \log_{0,3}(x+1) \geq \log_{0,3}(8-x)$$

№4. Розв’яжіть нерівність:

$$\log^2{}_2(x-1) - \log_2(x-1) \leq 0$$



$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \log^2{}_2(x-1) - \log_2(x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$\log^2{}_2(x-1) - \log_2(x-1) \le 0$

заміна $\boxed{\log_2(x-1) = t}$

$t^2 - t - 2 \le 0$

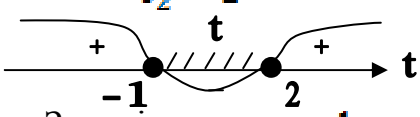
$t^2 - t - 2 = 0$

$\boxed{a = 1}$ $-b = 1$ $(-1)\cdot 2$

т. Вієта

$t_1 = -1$

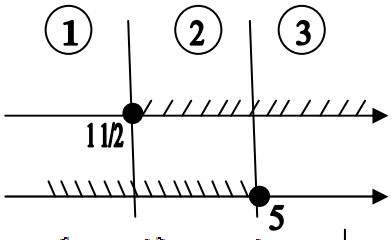
$t_2 = 2$



Зверніть увагу : $-1 \le t \le 2$,

тому пишуть фігурну дужку.

$\begin{cases} t \ge -1 \\ t \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2(x-1) \ge -1 \\ \log_2(x-1) \le 2 \end{cases}$



$\log_2(x-1) \ge -1$ | $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$

$\log_2(x-1) \ge \log_2 \frac{1}{2}$ | $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$a = 2;$ $\boxed{a > 1}$

$x - 1 \ge \frac{1}{2}$

$x \ge 1\frac{1}{2}$

$\log_2(x-1) \le 2$

$\log_2(x-1) \le \log_2 4$

$a = 2;$ $\boxed{a > 1}$

$x - 1 \le 4$

Алгоритм квадратних нерівностей:

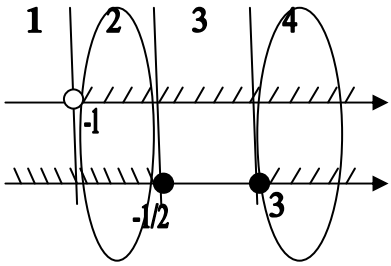
1. справа нуль;
2. доданки зведені;
3. коефіцієнт перед x^2повинен бути більше нуля $(a > 0)$;
4. прирівнюємо до нуля;
5. креслимо криву знаків;
6. Відповідь.

$x \le 5$

Відповідь: $x \in \left[1\frac{1}{2}; 5\right]$

№5. Розв'яжіть нерівність:

$$\log^2{}_{0,5}(x+1) + \log_{0,5}(x+1) - 2 \ge 0$$



(I) $\begin{cases} x+1>0 \\ \log^2{}_{0,5}(x+1) + \log_{0,5}(x+1) - 2 \ge 0 \end{cases}$

$x+1>0$

$x>-1$

$\log^2{}_{0,5}(x+1) + \log_{0,5}(x+1) - 2 \ge 0$

$\boxed{\log_{0,5}(x+1) = t}$

$t^2 + t - 2 \ge 0;$

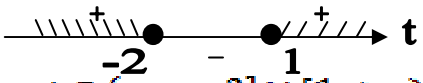
$t^2 \quad + t \quad - 2 = 0$

$\boxed{a=1} \; -b = -1 \quad 1 \cdot (-2)$

т. Вієта

$t_1 = 1$

$t_2 = -2$



$t \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

Зверніть увагу на проміжки, їх два, тому слід писати дужку об'єднання

$\left[\begin{array}{l} t \le -2 \\ t \ge 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_{0,5}(x+1) \le -2 \\ \log_{0,5}(x+1) \ge 1 \end{array}\right.$ - при такій дужці перетини не проводять.

$\log_{0,5}(x+1) \le -2$

$\log_{0,5}(x+1) \le \log_{\frac{1}{2}} 4$

$-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$

$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4}$

$a = \frac{1}{2}, \; \boxed{0 < a < 1}$

$x+1 \ge 4$

$x \ge 3$

$\log_{0,5}(x+1) \geq 1$

$\log_{0,5}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$, $\boxed{0 < a < 1}$

$x + 1 \leq \frac{1}{2}$

$x \leq -\frac{1}{2}$

Ці розв'язки слід нанести на другу лінію в системі (I).

Відповідь: $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

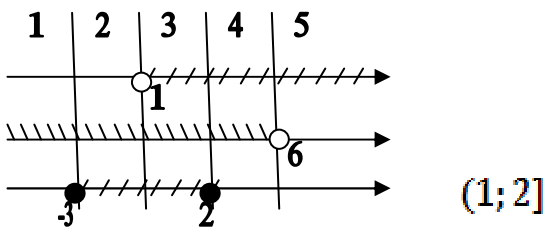
№6. Розв'яжіть нерівність:

$\log_x(6-x) \geq 2$

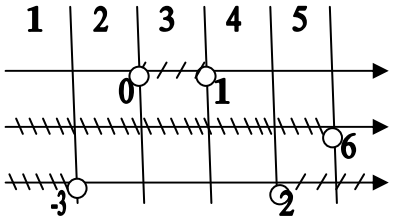
основа вираз, тому враховуємо

$\boxed{a > 1}$ *і* $\boxed{0 < a < 1}$

$$\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ \text{ОДЗ} \\ \text{сама нер.} \\ 0 < a < 1 \\ \text{ОДЗ} \\ \text{сама нер.} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ 6 - x > 0 \\ \log_x(6-x) \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 6 - x > 0 \\ \log_x(6-x) \geq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$



(1; 2]



Ø

$6 - x > 0$

$-x < -6$

$x < 6$

$\log_x(6-x) \geq 2$

$\log_x(6-x) \geq \log_x x^2$

$\boxed{a > 1}$

$6 - x \geq x^2$

$-x^2 - x + 6 \geq 0$

$x^2 + x - 6 \leq 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

$\log_x(6 - x) \geq 2$

$\log_x(6 - x) \geq \log_x x^2$

$\boxed{0 < a < 1}$

$6 - x \leq x^2$

$-x^2 - x + 6 \leq 0$

$x^2 + x - 6 \geq 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

Відповідь: $x \in (1; 2]$.

☺ ***<u>Розв'яжи самостійно:</u>***

$\log_x(x + 2) \geq 2.$